

II. Системы счета

Ряд натуральных чисел

Основой современного повсеместно принятого счета является *ряд натуральных чисел*. Мы пользуемся *натуральными числами* постоянно, можно сказать, ежечасно. Не проходит и часа, чтобы мы не посмотрели на часы либо не произвели каких-либо расчетов в уме или на бумаге, пользуясь натуральными числами. Мы также специально изучаем эти числа в школе, начиная с первого класса.

Что же такое натуральные числа? Они обозначают *те или иные количества*. Самое первое число – “*один*” обозначает одиночный предмет или явление. Следующее за ним число “*два*” – пару предметов (ног, носков, ботинок и пр.) или явлений («У нас сегодня было *два* урока»). Затем идут числа “*три*”, “*четыре*” и так далее. Каждое число выражает ту или иную величину, которая выведена из реально существующих количеств и которую мы можем показать на письме с помощью *цифр*.

Следует отличать *цифры* от *чисел*. ***Числа отражают разные количества, а цифры записывают числа.*** Числа (как мы это сделали выше) могут быть выражены словами – *один, два, три* и пр. Они могут быть обозначены специально придуманными знаками – на пальцах, с помощью камешков, зарубок (вспомните Робинзона Крузо) либо еще как-нибудь (например, флажками, точками и тире как в азбуке Морзе), но обычно они записываются разными цифрами – ***1, 2, 3...; I, II, III...***

Натуральный ряд включает *последовательно расположенный набор цифр* и еще распределяет их по *разрядам* – единицам, десяткам, сотням и прочее. Что такое разряды в этом ряду? Представьте себе вашу школу: в ней есть несколько первых классов, вторые классы и так далее. Когда заканчивают первый класс, переходят во второй, затем в третий и так до окончания школы. Это и есть разряды или более высокие уровни учебы. Точно также и числовые разряды: после завершения определенного набора чисел мы переходим в следующий, более высокий разряд. В школе может быть три первых, два вторых, четыре третьих класса, а в натуральном ряду в каждом разряде чисел должно быть поровну, в зависимости от *основания ряда*. В ряду с основанием *два* мы переходим в следующий разряд на каждом третьем числе, а с основанием *восемь* – через каждые восемь чисел. Обычно мы пользуемся рядом с основанием *десять*, то есть, переходим в следующий разряд через каждые десять чисел. В таком ряду в первом разряде находятся десять единиц, во втором – десять десятков, в третьем – десять сотен и далее таким же образом. В отличие от школы, где имеется всегда конечное число разрядов (10, 11 или 12 классов), в числовом ряду количество разрядов не ограничено и может быть продолжено до бесконечности.

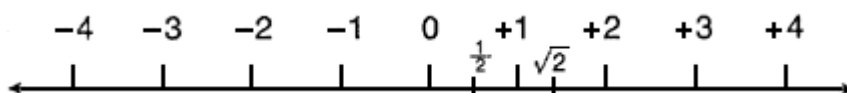
В натуральном ряду цифры распределяются не только по разрядам, внутри разрядов они ставятся *позиционно* (в каждом разряде на последнем месте стоят единицы, перед ними – десятки, затем сотни, тысячи и так далее). Всего во всем (практически бесконечном) ряду мы находим девять, так сказать, *значимых цифр* (от ***1*** до ***9***) и *ноль (нуль)*. Находясь на

соответствующем месте в том или ином разряде, эти десять цифр могут выразить любое – самое большое либо самое маленькое число. Там, где в разряде отсутствует значимая цифра, ставится нуль. Именно так сохраняется разряд: если бы вы написали число 203 без нуля, вы получили бы совсем другое число – 23 (разница огромная!).

Касаясь позиционной системы счисления, великий французский математик и астроном, *Пьер Лаплас* (XIX век) писал: «Мысль выражать все числа девятью знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этой мысли, мы видим на примере величайших гениев греческой учености – *Архимеда* и *Аполлония*, от которых эта мысль осталась скрытой». *Лаплас* пишет о девяти знаках, я пишу о десяти, имея в виду еще и *ноль*.

Таким образом, *ряд натуральных чисел* – это набор цифр, распределенных по разрядам и по позициям внутри разрядов и выражающих последовательно расположенные числа.

Ряд натуральных чисел, как было сказано, может продолжаться бесконечно долго, надстраивая числа как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения их количественных значений. *Ноль* является в этом ряду пограничным столбиком, от которого мы можем продолжать ряд как в сторону увеличения количеств, так и в сторону их уменьшения (тоже до бесконечности, но с отрицательным знаком – *минус*, который обычно принято показывать). Ниже на рисунке мы демонстрируем так называемую *числовую ось*, на которой отчетливо видны числа справа от нуля, отражающие увеличение количеств, и числа слева от нуля, отражающие их уменьшение. И в ту, и в другую сторону числовая ось может продолжаться до бесконечности.



Ответьте на несколько вопросов по ряду натуральных чисел:

Имеет ли ряд натуральных чисел начало и конец?

Что является пограничным знаком между плюсовыми и минусовыми цифрами?

Какими значками обозначаются плюсовые и минусовые величины?

Какие числа являются самыми важными в ряду? Почему вы так решили?

В народном сознании некоторые величины получили символический, почти мистический смысл. Мы напомним вам некоторые пословицы: «*Семь раз отмерь, один раз отрежь*», «*Для друга семь верст не околица*». Число семь занимает у разных народов очень почетное место. Некоторые ученые объясняют это тем, что семь дней составляют четверть (фазу) полного оборота Луны вокруг Земли. Она возвращается к своему прежнему облику через 28 суток, а через 7 суток вступает в отчетливо видимое и отлич-

ное от прежнего состояние – в новую фазу. (*Кто из вас может нарисовать четыре фазы Луны?*) Кроме того, из психологии известно, что мы одновременно можем воспринимать и запомнить только *семь* отдельных знаков (и не больше).

Напишите несколько рядов с разным количеством каких-нибудь значков и попытайтесь их запомнить за один раз. Сколько знаков вы усвоили сразу и смогли воспроизвести по памяти?

С суеверным почтением многие люди относятся к числу *тринадцать*. Число *два* было настолько “уважаемым”, что во многих языках специально выделялось *двойственное число* у существительных и в других частях речи. В иврите (языке, принятом в государстве Израиль) до сих пор, наряду с единственным и множественным числом, у существительных, имеющих две части (глаза, ножницы, рога...), выделяется двойственное число со своими окончаниями и правилами склонения. То же самое было в старославянском языке, на котором говорили наши предки. Они говорили, например: «Конь диких *своима* рукама связал есмь» («Дикого коня он связывал своими руками», – отметьте особую форму двух выделенных слов в оригинале). Или: «А лось *рогама* бол» («А лось бодался *рогами*»).

Приведите известные вам пословицы и поговорки с числами. Объясните, что эти пословицы означают. Постарайтесь вспомнить такие пословицы, в которых числам придается не прямой, а особый смысл.

Системы счисления

Заметьте, что только в некоторых системах счисления мы можем расположить цифры по разрядам и позициям внутри разрядов. В системе римских цифр, например, такое расположение невозможно: мы пишем цифру **X** (десять) или **M** (тысяча), не зная, к какому разряду принадлежат выраженные ими числа. Так же, если мы будем делать зарубки вместо цифр, мы можем произвольно распределять их по разрядам и позициям. Одно из преимуществ принятой нами десятичной системы счисления как раз заключается в том, что она отчетливо выражает разряд и позиции в любом числе, что позволяет быстро делать расчеты с ее помощью. А римляне легко записывали числа (для любого следующего числа они придумывали новое обозначение) и считали с помощью предметов типа обычных наших счетов, которые, кстати, назывались *абак*.

Цифровые системы счисления могут быть различными с точки зрения их построения на разных *основаниях*. Основание – это цифра, где ряд прерывается, чтобы возобновиться в новом более высоком разряде. Так, в *десятеричной системе счисления*, которой мы сегодня пользуемся, после десяти цифр (9 знаменательных + ноль) мы переходим из первого десятка во второй. В разряде десятков все числа имеют по две цифры. После 99 мы переходим в следующий разряд (в разряд сотен, где числа имеют по три цифры) и т.д. Каждый разряд в десятичной системе включает в себя по десять “участников” (10 единиц до перехода в десятки, десять десятков до перехода в сотни, десять сотен до следующего разряда и т.д.). Такое устройство системы позволяет нам не только с легкостью записывать любое число, читать и немедленно понимать его но, что еще более важно,

производить над числами любые арифметические действия, пользуясь самыми простыми правилами. Недаром изучение арифметических действий и их тренировки проводятся в начальной школе, в самом раннем школьном возрасте.

Существуют, однако, системы счисления, построенные на иных, а не на десятичном основании. Их мы коснемся ниже.

О нуле

В связи со сказанным встает вопрос об особой роли цифры *ноль* в ряду натуральных чисел, а также в различных системах счисления. Цифра *ноль* не отображает какой-либо величины, наоборот, она показывает *отсутствие любого количества*. Поэтому она не является числом. Это – цифра, отражающая не количество, а “пустое место”. Во-первых, то место, от которого натуральный ряд начинает расти по *вектору* (направлению) положительных величин и уменьшаться по вектору величин отрицательных. Во-вторых, она занимает место в разряде, где нет никакого значимого числа: в числе 102 отсутствуют десятки, что демонстрируется нулем; в числе 1003 отсутствуют десятки и сотни. Такая особая роль цифры *ноль* вначале ставила математиков в тупик и затрудняла понимание ряда натуральных чисел. Она на многие годы отсрочила появление десятичной системы счисления.

Вот очень краткая история возникновения и распространения *десятеричной системы счисления*.

Уже в VII столетии нашей эры десятичная система была известна индийским математикам. Позиционные записи чисел, а именно календарных годовых дат (без знака нуля), встречаются в Индии, по крайней мере, с VI века. Первое отчетливое обозначение нуля встречается на стенной надписи в городе Гвалиор, недалеко от Дели, и относится к 876 году н.э. В этой надписи все числа обозначены почти современной десятичной записью, а ноль стоит в конце числа 270 и выглядит совсем как сегодня, разве что он немного меньше остальных цифр.

От индусов эту систему восприняли арабы; они называли эти цифры “индийскими”. Мы их называем “арабскими цифрами”, потому что их привезли в Европу арабы. Арабы завоевали тогда часть Европы и имели с ней обширные торговые связи. Они также имели разветвленные торговые связи с Востоком, в частности с Индией. Одним из первых арабоязычных математиков, освоившим позиционную систему и написавшим о ней книгу (ее перевели потом на европейские языки), был *Мухаммед ал-Хорезми*, “родом из Хорезма” (VIII-IX века). Он писал: «Если не остается ничего, то пишут маленький кружок, чтобы место не оставалось пустым. Этот кружок должен занять место, в противном случае у нас будет меньше разрядов и второй, например, разряд мы сможем счесть за первый».

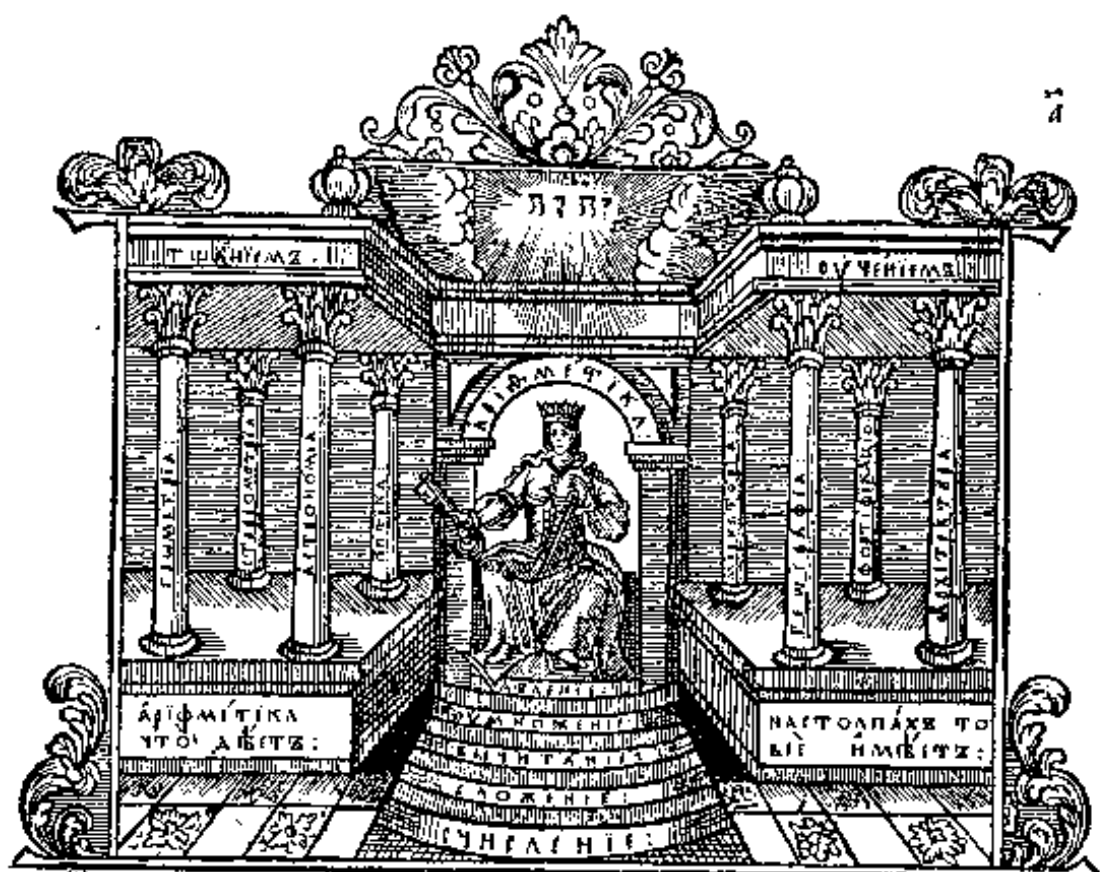
‘*Ноль*’ у индусов обозначался словом “шунья”, что значило “пустое” (место). Арабы перевели это слово на свой язык; у них оно звучало “ал-сыфр”, что тоже означало “пусто”. А европейцы образовали от него слово “цифра”, от которого пошли два термина – “цифра” и “шифр”.

В России первые книги с упоминанием десятичной системы и с использованием ее для вычислений появились в XVII веке. До этого считали по старой системе, основанной на буквах алфавита (смотрите ниже). Только при Петре I десятичная система заняла ведущее место, вытеснив прежнее счисление. Особое значение для пропаганды и распространения десятичной системы имела «Арифметика» Леонтия Магницкого, вышедшая в свет в 1703 году.

«Арифметика» напечатана славянским шрифтом, но с индийскими цифрами (они назывались тогда “цифирными числами”). Индийские цифры используются в книге для всех расчетов. Л. Магницкий писал в “Пределинии первом” (Первое определение): «Нумерация есть счисление (называние словами) всех чисел, которые изображаемы быть могут десятью такими знаками: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Из них девять значащих, последняя же 0 (которая “цифрою” или “ничем” именуется), если стоит одна, то сама по себе значения не имеет. Когда же она присоединяется к какой-нибудь значащей цифре, то увеличивает обозначенное число в десять раз...».

«Арифметику» Л. Магницкого упоминает М.В. Ломоносов, великий русский ученый, как книгу, по которой он изучал арифметику. Он очень высоко ее ценил. Ниже воспроизведена первая страница текста знаменитой книги:



ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ , ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΗΛΙ ΔΕΚΑΤΕΛΙΑ .

ΤΙ ΕΣΤΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ;

Αριθμητική ηλιν числителница , εστι хυδoжество
 честное , незабвѣтное , и всѣмъ оудовoполѣтное ,
 многополѣзньѣйшее , и многохбáльнѣйшее , ѿ дрѣ-
 внѣйшнхъ же и новѣйшнхъ , въ рáзнаа времена
 явлáшнхся и зрѣднѣйшнхъ арифметикoвъ , и зoбpа-
 женное , и и з л o ж е н н o e .

Κοινoκoγβα εστι αριθμητική πρακτική ;
 εστι γoγβα .

- 1 Αριθμητική πολιτική , ηλιν гражданская .
- 2 Αριθμητική λογιστική , не ко гражданству
 чoкнoвъ , нo и к движению нѣннхъ кoгбo ѿ принадлежаща .

Недесятеричные цифровые системы

Существуют и другие, недесятеричные системы счисления. У чукчей до последнего времени было *пятеричное счисление*: они считали, используя пальцы рук и ног. *Шестидесятиричное счисление* было принято в древнем Вавилоне (нынешний Ирак). Все меры делились на шестьдесят. Мы восприняли их систему для измерения времени: каждый час делится и сегодня на 60 минут, а минута – на 60 секунд. Также измерения углов проводятся по этой системе: полный оборот составляет 360 градусов, а прямой угол имеет 90°. Угловой градус разбивается на секунды – их в нем шестьдесят. Были и иные системы счислений (например, у инков в Южной Америке была *двадцатеричная* система), но сейчас во всем мире предпочитают известную вам систему с основанием в 10, ибо она оказалась самой понятной и простой в расчетах.

Вот что пишут по этому поводу в одном из текстов, который мы заимствовали из Интернета: «Другая позиционная система счисления, которая активно используется сегодня – это двоичная система. Она в некоторых отношениях проще десятиричной системы. В ней всего два знака – **0** и **1**. Эта система просто мечта нерадивого ученика. Таблица умножения в ней простейшая: “0 на 0 будет 0, один на один будет один” – это смог осилить даже Митрофанушка в “Недоросле” Фонвизина. Дальше он продвинуться не мог, но если бы он пользовался двоичной системой, ему и этого бы хватило. Правила умножения и деления также предельно простые – ничего не надо запоминать и откладывать. Но у двоичной системы есть и трудно устранимый недостаток – числа в ней записываются очень длинными по сравнению с десятиричной системой последовательностями знаков. Например, число 64 записывается как 1000000. Однако, простота двоичной системы оказалась важнее, чем громоздкость записи чисел.¹ Когда вычисления производит компьютер, он работает всегда в двоичной системе. И если вы набираете десятичные цифры на калькуляторе, это не должно вводить вас в заблуждение – они будут преобразованы в двоичный вид, а после этого над ними будут произведены нужные действия. Затем двоичные числа преобразуются опять в десятичные, и в окошке высветится результат в привычной для современного человека форме. <...>

Двоичная система в наши дни приобрела особое значение, поскольку, как было указано, именно она используется во всех счетно-решающих машинах, в том числе в компьютерах.

В непозиционных системах, таких как римская или египетская нумерация, необходимость в позиционном нуле не возникает. Но по мере роста чисел там все время нужны новые обозначения. Так в римской нумерации для чисел от ‘одного’ до ‘трех’ нам хватает одного знака – знака единицы, повторенного один, два или три раза. Для ‘четверки’ мы используем уже следующий знак и записываем ‘один’ и ‘пять’ – то есть ‘пять’ минус ‘один’. Потом мы добавляем знаки для ‘десяти’, ‘пятидесяти’, ‘ста’, ‘тысячи’ и так далее. Но для обозначения все больших и больших чисел нам приходится

¹ Не только “простота” записи двоичной системы оказалась причиной, по которой она была принята для вычислений в различных машинах. Машины переводят два знака системы в два физических объекта с противоположными состояниями, которые они различают и с которыми работают: лампочка горит ↔ не горит, на бумажной ленте есть дырочка ↔ нет дырочки и т.п.

изобретать все новые и новые знаки. Мы не можем выразить любое число ни девятью, ни каким другим конечным набором знаков.

Главный недостаток непозиционных систем счисления – это неудобство и сложность вычислений, особенно умножения и деления. Фактически, ни римская, ни другие непозиционные нумерации не использовались для реальных сложных вычислений. Для счета применялись разные виды счетных досок и палочек. Счетная доска называлась “абак”. Абак очень напоминает обычные счеты, которые еще совсем недавно лежали на каждом прилавке. А ведь расчеты на абаке подобны расчетам в позиционной системе счисления и потому удобны».

Мы процитировали отрывок из статьи А. Костинского и В. Губайловского, выставленной в Интернете под названием «Триединый ноль». Если у вас есть Интернет (“Всемирная Сеть”) и вы умеете им пользоваться, то можете набрать адрес статьи <http://svoboda.org/programs> и прочитать ее полностью. Вообще все вопросы, рассматриваемые в нашем учебнике, можно дополнить материалом, в изобилии представленном в Сети. Только адреса обычно нужно набирать по-английски. Английский язык является основным языком Сети, и вам следует его знать как можно лучше. Искать в Интернете можно не только по адресу, но также и по ключевым словам той или иной темы (тогда можно использовать и русский текст).

Абак

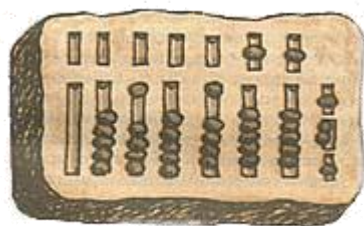
Абак – это приспособление для счета. В истории математики ему отводится очень важное место: большую часть времени, когда люди умели считать, они делали расчеты с помощью абак. Он является также переходной ступенью к цифровому позиционному счислению.

Раньше всего люди, по-видимому, научились пересчитывать сами предметы: *один* обсчитываемый предмет, *два*, *три* и пр. Потом они научились считать не сами объекты (когда их не было или они были слишком неудобны для пересчета), а их реальные заменители: один предмет – один камешек (или еще что-нибудь), два предмета – два камешка (два рисунка, две зарубки) и прочее. Наконец они придумали *абак*, на котором тоже обсчитывались реальные предметы, заменявшие объект счета, но которые можно было уже расположить по разрядам и позиционно. Это дало возможность перейти потом к цифрам, располагавшимся по разрядам и позициям, то есть к сегодняшним системам счета.

Обычно *абак* – это несколько линеек, на которых располагаются какие-то предметы, как на русских счетах, где на последовательных проволоках помещено по десять круглых косточек. Каждая вышерасположенная проволока обозначает более высокий разряд. Каждая косточка в новом разряде включает в себя столько косточек, сколько имеется на нижерасположенной проволоке. На русских счетах на нижней проволоке имеется десять косточек, которые обозначают единицы. Когда вы доходите в счете до десяти, вы эти десять косточек заменяете одной со следующей проволоки, ибо на ней отмечаются десятки (десять, двадцать, тридцать и т.д.). Следующая проволока содержит сотни, еще выше – тысячи и прочие разряды. Когда вы считываете результат расчетов, то вы начинаете сверху – столь-

ко-то тысяч, сотен, десятков и единиц, то есть каждое число по порядку его расположения в общей сумме. Ноль в абак не нужен.

Вначале абак представлял собой просто линейки на песке. Палочкой чертили линейки-разряды, а на них помещали нужное количество единиц, десятков, сотен и других разрядов (с помощью камешков или отметок). Слово *абак* взято из иврита, где оно обозначает “пыль”, “порошок”. Потом научились строить абак из дерева, камня или металла, вставляя туда для счета камешки, косточки либо другие мелкие предметы. Вот как выглядел абак из Древнего Рима, который дошел до нас:



Он изготовлен из бронзы, вероятно в V-VI веках н.э. В нем выбиты желобки, в каждый из которых помещали по пяти камешков; их двигали как косточки в русских счетах. Доходя до пяти, можно было перейти на следующий желобок, в котором каждый камешек обозначал “пять”, то есть использовали систему с пятеричным основанием. Основания для счета могли быть различными, но разряды и позиции сохранялись во всех типах абак. В России применялись счеты с десятиричным основанием. Они появились в XVI веке и продержались до конца XX века. У ацтеков (Южная Америка) счеты были изобретены в X веке и изготовлялись из зерен кукурузы, нанизанных на струны в деревянной раме (если вы помните, у ацтеков было двадцатеричное счисление). Следующей ступенькой в овладении счетом было уже изобретение цифр и построение из них позиционной системы счисления. А самым последним достижением человечества было создание счетно-решающих машин, которым мы передали придуманные нами системы счисления (двоичную систему) и математические действия над ними (*алгоритмы*). Теперь машины считают гораздо быстрее и гораздо точнее людей.

Принесите в класс счеты и потренируйтесь в работе с ними. Кроме того, напишите римские цифры, которые могут обозначить все числа от одного до тысячи (их не так много). Запишите несколько примеров римскими цифрами, но решайте их на счетах либо в виде обычных арифметических примеров. Затем результат снова обозначьте римскими цифрами.

Нецифровые системы счета – буквенный счет

Как упоминалось выше, в России до введения “цифирных чисел” для счета использовали буквы. Еще раньше буквенную систему счета использовали греки и евреи. Для записи чисел греки пользовались системой, называвшейся ионической нумерацией. Она была повторена в *славянской кириллической нумерации* (вы помните, что кириллица произошла от греческого алфавита?).

Славянская кириллическая нумерация

Эта нумерация была создана вместе со славянской алфавитной системой для перевода священных книг братьями Кириллом (Константином) и Мефодием в IX веке нашей эры. Такая форма записи чисел получила большое распространение в связи с тем, что имела полное сходство с греческой записью чисел. Если посмотреть внимательно, то увидим, что после "а" идет буква "в", а не "б", как следует по славянскому алфавиту, то есть используются только буквы, которые есть в греческом алфавите. До XVII века эта форма записи чисел была официальной на территории современной России, Белоруссии, Украины, Болгарии, Венгрии, Сербии и Хорватии. До сих пор православные церковные книги используют эту нумерацию.

а - 1	і - 10	ρ - 100
в - 2	к - 20	с - 200
г - 3	л - 30	т - 300
д - 4	м - 40	ϥ - 400
е - 5	н - 50	φ - 500
ѕ - 6	ѣ - 60	χ - 600
з - 7	о - 70	ψ - 700
и - 8	п - 80	ω - 800
ѹ - 9	ч - 90	ц - 900

Записывались числа, начиная с больших значений и заканчивая меньшими, слева направо. Если десятков, единиц, или какого-то другого разряда не было, то его пропускали (то есть, знака для нуля не было). Интереснее всего записывались числа второго десятка:

ДІ - 14

Читаем дословно "четырнадцать" – "четыре на десять". Как слышим, так и пишем: не 10+4, а 4+10, – четыре на десять. И так для всех чисел от 11 до 19. Таким образом, у славян мы прослеживаем десятиричную систему счисления. Запись числа, использованная славянами, – добавочная, то

есть в ней используется только сложение: **ѠѢГ - 863** = 800+60+3.

Для того чтобы не перепутать буквы и цифры, использовались *титла* – горизонтальные черточки над числами, что мы видим на рисунке. Для обозначения больших, чем 900 чисел использовались специальные значки, добавляемые к букве. Так образовывались числительные: "Тысяща" = 1 000, "Леон" = 10 000, "Одр" = 100 000, "Вран" (ворон) = 1 000 000, "Колода" = 10 000 000, "Тьма" = 100 000 000.

Пользуясь этой системой можно не только записывать числа, но достаточно быстро считать, хотя только немногие правила действий для этой системы дошли до нас. Из книги древнегреческого математика *Аполлония Пергского* под названием "Окитокнон" (примерный перевод – "Быстросчет-

чик') сохранились лишь отдельные страницы. Математикам, однако, удалось производить с помощью приведенной записи сложные расчеты. Повсеместное применение десятичной системы совершенно вытеснило близкое знакомство с другими системами счисления.

Славянская нумерация сохранялась в России до XVIII века, а после этого употреблялась лишь в церковных книгах и в надписях на некоторых монетах, где славянские изображения чисел встречаются вплоть до XX века. Уже А.С. Пушкин, который учился в Царскосельском лицее в начале XIX века, писал: «И мне ли рыться в летописях и добираться до сокровенного смысла обветшалого языка (старославянского), когда не мог я выучиться славянским цифрам». Впрочем, ему это и не надо было, поскольку «арабские цифры» к тому времени полностью возобладали.

От *буквенного счета* следует отличать *гематрию*, хотя и то, и другое построено на одном и том же принципе: придание буквам численных значений. В *буквенном счете* такая операция имеет целью решать чисто математические задачи, а в *гематрии* целью является толкование текстов. С помощью чисел как бы разгадывается смысл слова и целого высказывания. Очень часто одно слово сравнивается с другим по «количеству» составляющих его букв, что дает возможность дополнительных объяснений. Например, в иврите слово 'сод' ('секрет') содержит три буквы, которые в сумме дают число 70. Также и в слове 'яин' ('вино') другие три буквы дают в сумме 70. Сравнение этих двух слов по числам составляющих их букв в поговорке «Пришло вино – ушел секрет» как бы усиливает ее содержание. Буквы использовались (и до сих пор используются) для обозначения дат (дней недели и года) и во время войны – для быстрой кодировки секретной информации.

Происхождение *гематрии* связывается с древнееврейским мистическим учением *каббалы*. В каббале очень часто ключевые слова (такие как 'мессия' и другие) объясняются с помощью *гематрии*. Знаете ли вы значение этого слова? Мессия – это провозвестник установления на Земле нового Божественного порядка и справедливости. Он, согласно многим религиям, должен провозгласить приход такого миропорядка. В христианской религии Мессией считают Христа, чье новое появление на Земле приведет к возрождению и расцвету. Последователи иудейской религии не знают, кто будет Мессией, но также верят в его приход в будущем.

Нецифровые системы счета – пальцевый счет

Считается, что в самом начале люди считали по пальцам. По наблюдениям знаменитого русского путешественника Н. И. Миклухо-Маклая, туземцы Новой Гвиней считали следующим образом: «Папуас загибает один за другим пальцы руки, причем издает определенный звук, например бе-бе-бе... Досчитав до пяти, он говорит ибон-бе (рука). Затем он загибает пальцы другой руки... пока не доходит до ибон-али (две руки). Идет дальше, приговаривает бе-бе..., пока не доходит до самба-бе и самба-али (одна нога, две ноги). Если нужно считать дальше, папуас пользуется пальцами рук и ног кого-нибудь другого».

Но таким образом на своих пальцах рук и ног можно показать не более двадцати чисел. Как же выйти за эти пределы? Систему усовершенствовали за счет того, что пальцы рук стали принимать разное положение и сочетаться с движениями рук. Вот как вышли из положения австралийцы из племени аранта:



Такой счет возможен только тогда, когда ты знаешь натуральный ряд чисел и какую-то систему счисления. Жестами можно передать числа, а считать все равно приходится обычным способом. Иногда жесты дают возможность использовать счет на расстоянии, когда нет других способов передачи информации. Например, во время спортивной игры можно на пальцах показать счет, не собирая игроков. Во время торгов на бирже маклеры (биржевые служащие) не бегают каждый раз в свои кабинеты, чтобы посоветоваться с клиентами о покупке или продаже акций. Они показывают на пальцах предложения о продаже и получают от них ответ, выраженный кивком головы либо иным жестом. Так, в «Истории арифметики» *Л. Карпинского* сообщается о том, что на крупнейшей в мире хлебной бирже в Чикаго (США) предложения и запросы любого количества пшеницы, равно как и цены, объявлялись маклерами на пальцах без добавления слов (это было в первой половине XX века). Сейчас, разумеется, пользуются мобильными телефонами, что значительно удобней.

Самыми интересными системами пальцевого счета являются все же такие, которые не ограничиваются показом чисел, но дают возможность производить на пальцах арифметические действия, хотя бы и самые простые. В разных странах используются разнообразные системы счета на пальцах. В Корее был предложен способ умножения небольших чисел (от 1 до 9) на 9. Для этого надо положить обе руки на стол ладонями вниз и растопырить пальцы. Каждый палец принимается за единицу. Допустим, умножается 4 на 9 (первым множителем должно быть 4, а 9 – вторым). Загните указательный палец (четвертый слева) левой руки по первому множителю – 4. Сосчитайте сколько пальцев осталось влево от него (это будет количество

десятков в ответе – **3**) и сколько пальцев будет справа от загнутого, включая и правую руку. Их будет **6**, что составит количество единиц в ответе ($4 \times 9 = 36$).

Попробуйте сами умножить этим способом любое число до 10 на 9.

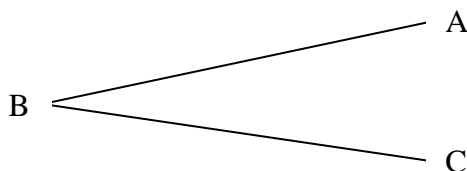
А вот более сложный прием, который применялся еще в древнем Риме. Знаменитый римский писатель и оратор, *Марк Туллий Цицерон*, жаловался, что в школах таблицу умножения изучают только до 'пяти', а дальше используют счет на пальцах. Как же они это делали? Если брать числа больше 'пяти' и меньше 'десяти', то их можно перемножить следующим образом. На левой руке выпрямляют столько согнутых пальцев, на сколько первый множитель больше пяти; на второй руке – столько пальцев, на сколько второй множитель больше пяти. Допустим, надо 7 умножить на 8. Тогда на левой руке будут вытянуты 2 пальца, а на правой – 3. Если сложить количество этих пальцы ($2 + 3 = 5$), то получим десятки искомого числа. Затем надо перемножить между собой количество пальцев, оставшихся загнутыми ($3 \times 2 = 6$). Так мы получаем единицы искомого произведения. Действительно, $7 \times 8 = 56$.

Попробуйте и вы сделать несколько умножений чисел больших 'пяти' и меньших 'десяти' между собой так, как это делали римские школьники. Смогли ли вы это сделать?

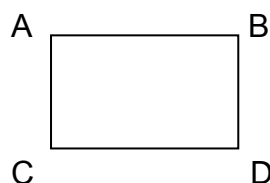
Буквы в ряде других математических дисциплин, кроме арифметики

Мы говорили о буквенном счете в системах, где буквы выступают вместо цифр, а потом с соответствующими числами производятся расчеты. В разных математических дисциплинах, которые вы подробно изучаете в старших классах (*алгебре, геометрии, тригонометрии*), тоже широко используются буквы. Но в них буквы имеют совершенно иное назначение.

Нецифровые системы счета возникли до того, как появились цифры. Люди просто не знали цифр, и числа выражались буквами. Алгебра и иные упомянутые дисциплины возникли в математике после изобретения цифр, в них пользуются буквами совершенно для других целей. В геометрии буквы обозначают ту или иную фигуру. Вот как можно обозначить угол:



Верхняя линия угла может быть обозначена буквами *BA*, нижняя – буквами *BC*, а весь угол как *ABC*. Мы так и говорим – «угол *ABC*», причем, произносим эти буквы как латинские: [a] – [бе] – [це]. Важно отметить, что мы сами выбираем в этом случае буквы для обозначения. Мы могли бы назвать наш угол другими буквами, например, *XYZ* [икс] – [игрек] – [зед]. Иначе говоря, буквы здесь выбираются произвольно. Возьмем еще одну геометрическую фигуру – *четыреугольник*:



Это четырехугольник (в нем четыре угла), и он называется «четыреугольником [а] – [бе] – [де] – [це]» по имени латинских букв. Таким образом, в геометрии (и в тригонометрии) используются произвольно выбранные буквы для обозначения каких-то объектов, с которыми эти науки имеют дело.

Другое дело алгебра. Там буквы выбираются тоже произвольно, но они обозначают числа. Числа, которые мы еще не знаем, но пытаемся узнать, решая какую-то алгебраическую задачу. Обычно в алгебре числа нам известные изображаются первыми буквами латинского алфавита [a, b, c], либо из середины алфавита [l, m, n]. Для изображения же неизвестных (искомых) величин пользуются тремя последними буквами латинского алфавита: x [икс], y [игрек], z [зед], но могут быть использованы и другие обозначения:

$$x = 6 + 4 \rightarrow 6 + 4 = 10 \rightarrow x = 10;$$

$$20 = y - 10 \rightarrow y = 20 + 10 \rightarrow y = 30;$$

$$z = 5 \times 15 \rightarrow z = 75.$$

Во всех алгебраических задачах (преобразованиях) ставится одна и та же цель: выяснить численные значения неизвестных нам чисел выраженных последними буквами алфавита. Такие знаки-буквы мы называем *переменными* – мы не знаем, что стоит за переменным знаком. Конкретная величина какого-нибудь предмета, (величина комнаты, например) появляется в результате решения задачи и заранее нам не известна. Переменные знаки используются не только в алгебре, но в ней они являются самыми важными компонентами. Переход от известных величин, зашифрованных буквами, к переменным потребовал очень много времени: подлинный расцвет алгебры начался только в XVII веке нашей эры, а развитые арифметические системы счета с буквами были известны задолго до того.

Ключевые слова по теме:

Число; цифра; ряд натуральных чисел; римские цифры (примеры); арабские цифры; индийские цифры; разряд и позиция цифры в системе; ноль (нуль); плюсовые и минусовые цифры в числовом ряду; числовая ось; десятичная, двоичная и другие системы счисления; абак; счеты; буквенная система счета; гематрия; пальцевые системы счета; буквы в геометрии и тригонометрии; буквы в алгебре.